

§4.3 第2课时 用向量方法研究立体几何中的度量关系(二)

【学习目标】

1. 会用向量法求二面角的大小.
2. 能正确区分平面法向量所成的角与二面角的平面角的关系.

【重点难点】

重点：会用向量法求二面角的大小.

难点：能正确区分平面法向量所成的角与二面角的平面角的关系.

【导学流程】

一、问题导入

问题1 两个平面所成的角与二面角的平面角有何区别？

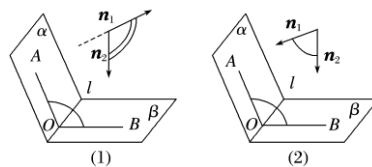
问题2 二面角的平面角与两平面的法向量所成夹角有何关系？

二、探究新知

◇探究一 二面角

【知识梳理】

一般地，已知 n_1, n_2 分别为平面 α, β 的法向量，则二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角与两法向量所成角 $\langle n_1, n_2 \rangle$ _____ (如图(1))或 _____ (如图(2)).



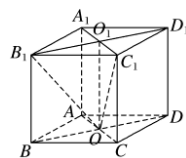
注意点：

(1) 求二面角的平面角问题转化为两平面法向量的夹角问题.

(2) 两平面所成的角的范围是 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，二面角的范围是 $[0, \pi]$.

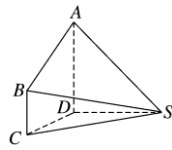
(3) 二面角与两平面的夹角不是相同的概念.

例1 如图，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长都相等， $AC \cap BD = O$ ， $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$ ，四边形 ACC_1A_1 和四边形 BDD_1B_1 均为矩形.



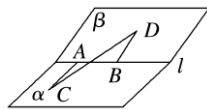
延伸探究 本例条件不变，求二面角 $B-A_1C-D$ 的平面角的余弦值.

跟踪训练 1 如图所示，在几何体 $S-ABCD$ 中， $AD \perp$ 平面 SCD ， $BC \perp$ 平面 SCD ， $AD=DC=2$ ， $BC=1$ ，又 $SD=2$ ， $\angle SDC=120^\circ$ ，求二面角 $B-AS-D$ 的平面角的余弦值。

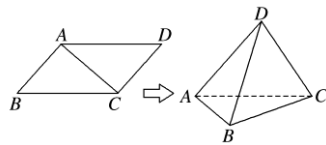


◇探究二 与二面角有关的距离问题

例 2 如图所示，在 120° 的二面角 $\alpha-l-\beta$ 中， $A \in l$ ， $B \in l$ ， $AC \subset \alpha$ ， $BD \subset \beta$ 且 $AC \perp AB$ ， $BD \perp AB$ ，垂足分别为 A ， B 。已知 $AC=AB=BD=6$ ，则线段 CD 的长为_____。



跟踪训练 2 如图所示，在 $\square ABCD$ 中， $AB=AC=1$ ， $\angle ACD=90^\circ$ ，将 $\triangle ACD$ 沿对角线 AC 折起，使得 AB 与 CD 成 60° 角，则折起后 BD 的长为_____。

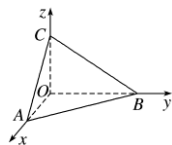


三、随堂演练

1. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个半平面 α 与 β 的法向量分别为 \mathbf{a} ， \mathbf{b} ，若 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\pi}{3}$ ，则二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角的大小为()

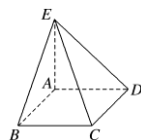
- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{3}$

2. 如图所示，点 A ， B ， C 分别在空间直角坐标系 $Oxyz$ 的三条坐标轴上， $\vec{OC}=(0,0,2)$ ，平面 ABC 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(2,1,2)$ ，二面角 $O-AB-C$ 的平面角为 θ ，则 $\cos \theta$ 等于()



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

3. 如图，过边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的顶点 A 作线段 $EA \perp$ 平面 $ABCD$ ，若 $EA=1$ ，则平面 ADE 与平面 BCE 所成二面角的平面角的大小是_____。



4. 若 120° 的二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱 l 上有 A, B 两点, AC, BD 分别在半平面 α, β 内, $AC \perp l$, $BD \perp l$, 且 $AB=AC=BD=1$, 则 CD 的长等于()

- A. $\sqrt{5}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

四、课堂小结

1. 知识清单:

(1)两个平面所成的角与二面角. (2)与二面角有关的距离问题.

2. 方法归纳: 转化与化归.

3. 常见误区: 对二面角的平面角与平面法向量所成角的关系认识不到位而致误.

五、布置作业 (课时对点练)

基础巩固

1. 已知两平面的法向量分别为 $m=(0,1,0)$, $n=(0,1,1)$, 则两平面所成二面角的平面角为()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}$

2. 已知向量 m, n 分别是平面 α 和平面 β 的法向量, 若 $\cos \langle m, n \rangle = -\frac{1}{2}$, 则 β 与 α 所成二面角的平面角为()

- A. 30° B. 60° 或 120° C. 120° D. 150°

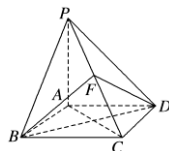
3. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 为 BB_1 的中点, 则平面 A_1ED 与平面 $ABCD$ 所成二面角的平面角的余弦值为()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=1$, $AD=\sqrt{3}$. 现将 $\triangle ABD$ 沿 BD 翻折, 形成大小为 θ 的二面角 $A-BD-C$, 并且 $AC=\sqrt{2}$, 则 $\cos \theta$ 等于()

- A. $\frac{\sqrt{35}}{6}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

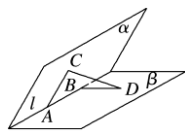
5. 如图所示, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, 且 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=AD=AC$, 点 F 为 PC 的中点, 则二面角 $C-BF-D$ 的平面角的正切值为()



- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

6. 二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角为 60° , A, B 是棱 l 上的两点, AC, BD 分别在半平面 α, β 内,

$AC \perp l$, $BD \perp l$, 且 $AB=AC=a$, $BD=2a$, 则 CD 的长为()

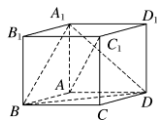


- A. $\sqrt{3}a$ B. $2\sqrt{2}a$ C. $\sqrt{5}a$ D. $2a$

7. 设平面 ABC 的一个法向量为 $\mathbf{m}=(1,1,0)$, 平面 ABD 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(1,0,-1)$, 则二面角 $C-AB-D$ 的平面角的大小为_____.

8. 在空间中, 已知平面 α 过 $A(3,0,0)$ 和 $B(0,4,0)$ 及 z 轴上一点 $P(0,0,a)(a>0)$, 如果平面 α 与平面 xOy 所成二面角的平面角为 45° , 则 a =_____.

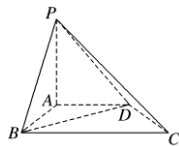
9. 如图所示, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $AB=AD=2$, $AA_1=\sqrt{3}$, $\angle BAD=120^\circ$.



(1) 求异面直线 A_1B 与 AC_1 所成角的余弦值;

(2) 求二面角 $A-A_1D-B$ 的平面角的正弦值.

10. 如图在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \perp AD$, $AD \parallel BC$, $AP=AB=AD=1$.

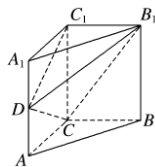


(1) 若直线 PB 与 CD 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$, 求 BC 的长;

(2) 求二面角 $B-PD-A$ 的平面角的余弦值.

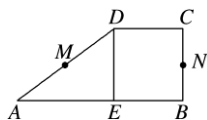
综合运用

11. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $2AC=AA_1=BC=2$, D 为 AA_1 上一点. 若二面角 B_1-DC-C_1 的平面角的大小为 60° , 则 AD 的长为()



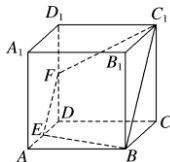
- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. 如图所示, M , N 是直角梯形 $ABCD$ 两腰的中点, $DE \perp AB$ 于 E , 现将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起, 使二面角 $A-DE-B$ 为 45° , 此时点 A 在平面 $BCDE$ 内的投影恰为点 B , 则 M , N 的连线与 AE 所成的角的大小为()

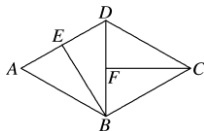


- A. 45° B. 90° C. 135° D. 150°

13.如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F 分别为 AD, DD_1 的中点，则二面角 $E-BC_1-C$ 的平面角的正弦值为_____.

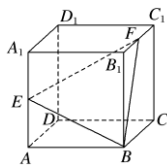


14.如图所示，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$ ，线段 AD, BD 的中点分别为 E, F .现将 $\triangle ABD$ 沿对角线 BD 翻折，当二面角 $A-BD-C$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$ 时，异面直线 BE 与 CF 所成角的正弦值是_____.



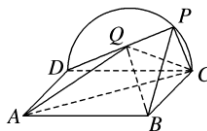
拓广探究

15.如图所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为线段 AA_1 上的一个动点， F 为线段 B_1C_1 上的一动点，则平面 EFB 与底面 $ABCD$ 所成的锐二面角余弦值的取值范围是()



- A. $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ B. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ C. $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ D. $\left[0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$

16.如图，已知矩形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 CD 所在平面垂直， P 是半圆弧 CD 上异于 C, D 的点.



(1)证明：平面 $PAD \perp$ 平面 PAC ;

(2)若 $AB=2AD=2$ ， $PQ=tPD(0 < t < 1)$ ，当三棱锥 $C-PAD$ 的体积最大且二面角 $Q-AB-P$ 的平面角的大小为 30° 时，试确定 t 的值.